1.3章

担当　長谷川禎彦

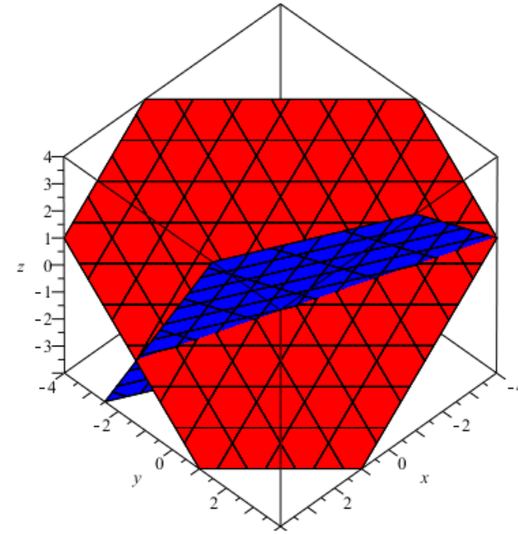
§3･アフィン多様体のパラメータ付け

- アフィン多様体 V(f1,f2,...fs)の点を記述する方法
  - f1=0, f2=0, ...の解を書き下す方法

- アフィン多様体のパラメータ付けの概念を導く

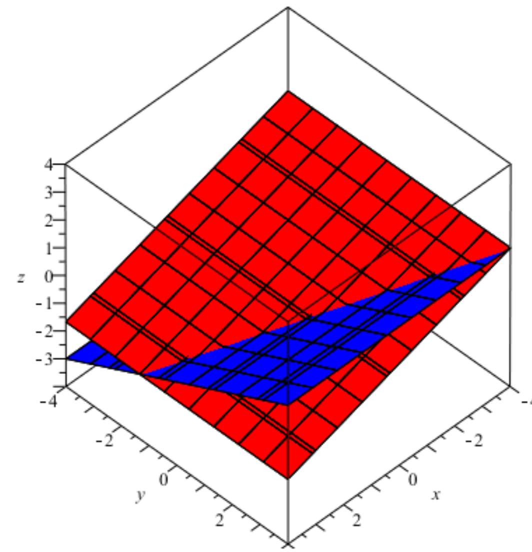
パラメータ付け

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 1, \\
x + 2y - z &= 3
\end{aligned}
$$



$$x + 3z = -1,$$

$$y - 2z = 2$$



$$x = -1 - 3t,$$

t : パラメータ

$$y = 2 + 2t,$$

パラメータ付け

$$z = t$$

パラメータ付け

$$x^2 + y^2 = 1$$

パラメタ付け

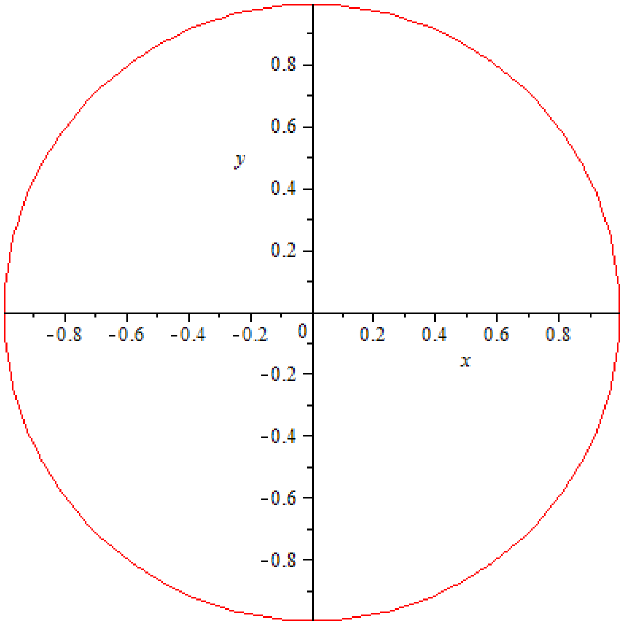
有理パラメタ付け

$$x = \cos(t),$$

$$y = \sin(t).$$

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$



定義1

定義 1 k を体とする．体 k に係数を持つ $t_1, \ldots, t_m$ の有理関数とは，2 つの多項式 $f, g \in k[t_1, \ldots, t_m]$ の商 f/g のことである．ただし g は零多項式ではないとする．さらに $k[t_1, \ldots, t_m]$ において $lf = gh$ ならば，2 つの有理関数 f/g と h/l は等しい．k に係数を持つ $t_1, \ldots, t_m$ の有理関数全体の集合を $k(t_1, \ldots, t_m)$ で表す．

有理パラメタ表示

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r_1(t_1, \ldots, t_m), \\
x_2 &= r_2(t_1, \ldots, t_m), \\
&\vdots \\
x_n &= r_n(t_1, \ldots, t_m)
\end{aligned}
$$

$$r_1, \cdots, r_n \in k(t_1, t_2, \cdots, t_m)$$

二つの表示

- 陰関数表示

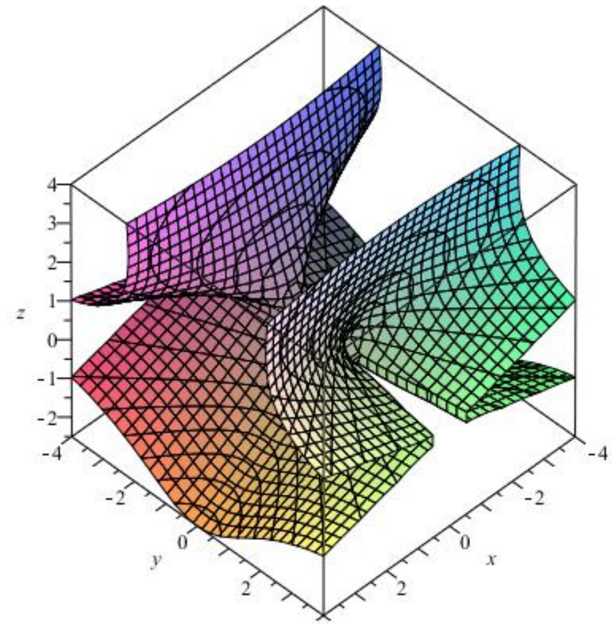
$$x^2 - y^2 z^2 + z^3 = 0$$

- パラメータ表示

$$x = t(u^2 - t^2),$$

$$y = u,$$

$$z = u^2 - t^2$$



- 二つの問
  - 任意のアフィン多様体は有理パラメータ表示をもつか？⇒**NO**
  - アフィン多様体のパラメータ表示が与えられたとき，定義方程式（陰関数表示）を求められるか？⇒**YES**

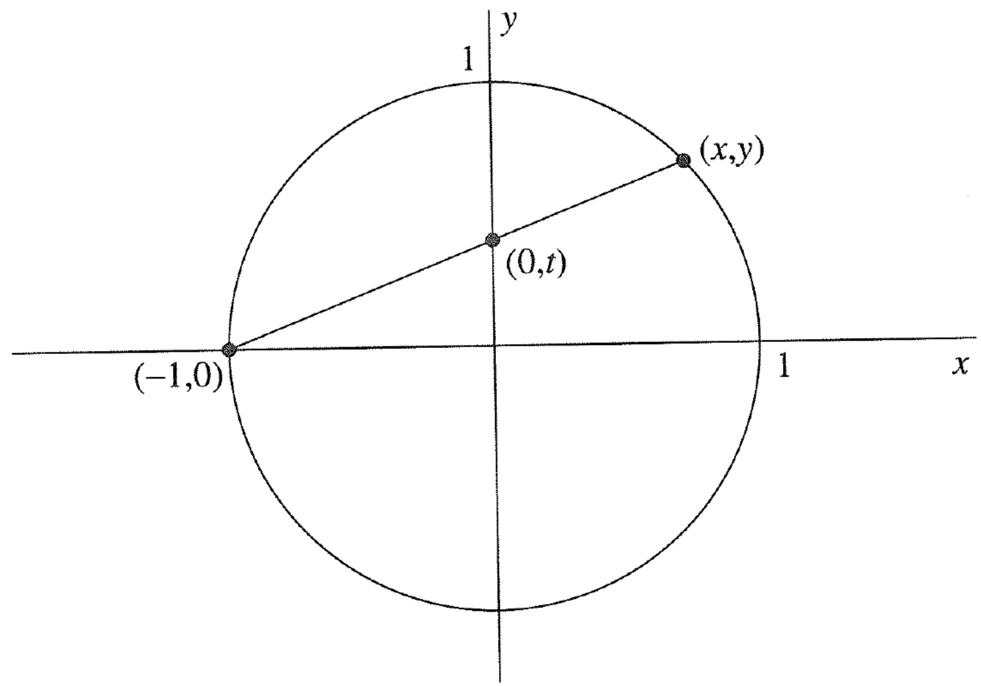
陰関数表示とパラメータ

- 陰関数⇒パラメータの例

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$t \in (-\infty, \infty)$$



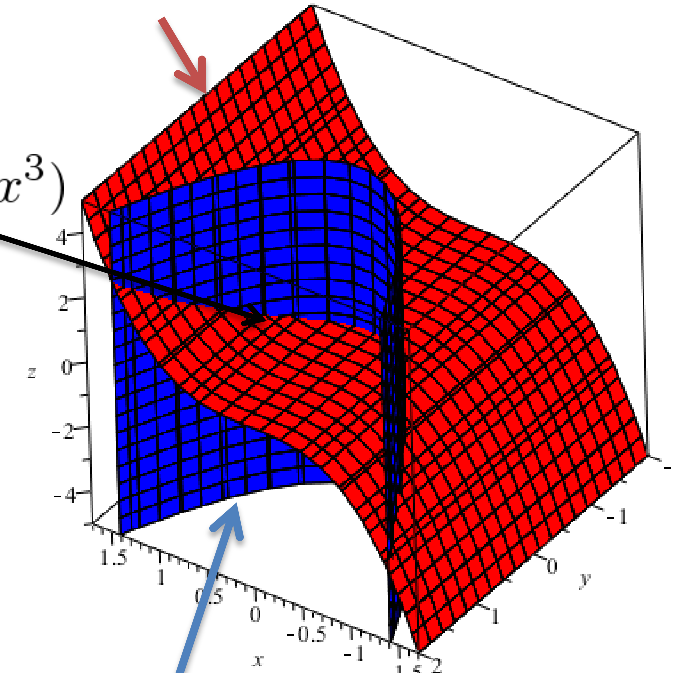
接曲面

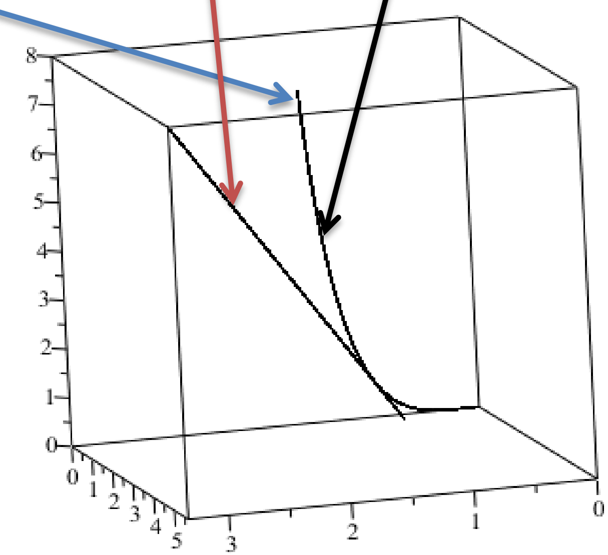
$$\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$$

$$x = t, \qquad x = t + u,$$

$$y = t^2, \quad \Longrightarrow \quad y = t^2 + 2tu,$$

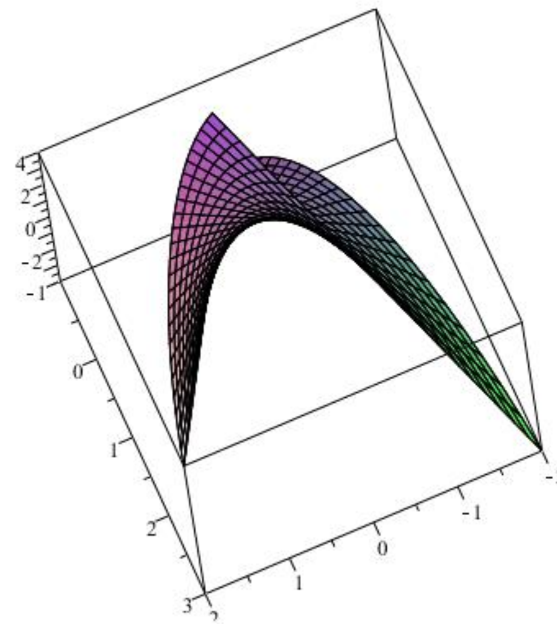
$$z = t^3 \qquad z = t^3 + 3t^2 u$$





接曲面

$$x = t + u,$$
$$y = t^2 + 2tu,$$
$$z = t^3 + 3t^2 u$$



- 接曲面から陰関数表示は求められるか？
  - 二章と三章

$$-4x^3 z + 3x^2 y^2 - 4y^3 + 6xyz - z^2 = 0$$

ベジェ曲線

- 曲線の始点と終点,
- 曲線の始点と終点における接線方向.

$$x = (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t) x_2 + t^3 x_3,$$
$$y = (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t) y_2 + t^3 y_3.$$

始点と終点

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0),$$
$$(x(1), y(1)) = (x_3, y_3)$$

始点と終点の接ベクトル

$$(x'(0), y'(0)) = 3(x_1 - x_0, y_1 - y_0),$$
$$(x'(1), y'(1)) = 3(x_3 - x_2, y_3 - y_2)$$

ベジェ曲線