第1章　幾何,代数,アルゴリズム
§1　多項式とアフィン空間

担当　乳井昌道

体(field)

- 通常の性質を持つ加法、減法、乗法、除法が定義できる集合(きちんとした定義は付録Aの§1を参照)

- 例)実数全体R、複素数全体Cは体。ただし、整数全体Zは体ではない(除法がうまくいかない)

体の定義(付録Aの§1)

(ⅰ)結合法則が成り立つ.
(ⅱ)交換法則が成り立つ.
(ⅲ)分配法則が成り立つ.
(ⅳ)零元、単位元が存在する.
(ⅴ)加法において逆元が存在する.
(ⅵ)乗法において逆元が存在する.

※可換環(commutative ring)の定義は、上記から(ⅵ)を除いたもの.

定義1

$x_1,\ldots,x_n$の単項式(monomial)とは

$$x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

の形の積のことをいう. ここで指数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ は非負の整数である. 和 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ をこの単項式の全次数(total degree)という.

定義2

係数を任意の体 k に持つ $x_1,\ldots,x_n$ の多項式 (polynomial) f とは、体 k の元を係数とする単項式の有限個の線型結合のことをいう. 多項式 f を次のように表す.

$$f = \sum_{\alpha} \alpha_{\alpha} x^{\alpha}, \qquad \alpha_{\alpha} \in k$$

係数を k に持つ$x_1,\ldots,x_n$の多項式全体の集合を $k[x_1,\ldots,x_n]$ と表す.

定義3

$f=\sum_{\alpha}\alpha_{\alpha}x^{\alpha}$ を$k[x_1,\ldots,x_n]$ の多項式とする.

(ｉ)α_α を x^αの係数(coefficient)という.

(ii)$\alpha_\alpha \neq 0$ のとき, $\alpha_\alpha x^\alpha$ を f の項(term)という.

(iii)係数 α_α がゼロでないような$|\alpha|$の最大値を全次数(total degree)といい,deg(f)で表す.

多項式環

加法と乗法の下で, $k[x_1,\ldots,x_n]$ は体の公理のうち,乗法の逆元の存在以外のすべてを満たす.

このような数学的構造を可換環という(定義は付録Aの§1を参照)

そのため $k[x_1,\ldots,x_n]$ を**多項式環**(polynomial ring)と呼ぶ.

定義4

体 k と正の整数 n が与えられているとき, k 上の n 次元アフィン空間(affine space)とは次のように定義される集合のことである.

$$k^n = \{(a_1,\ldots,a_n) : a_1,\ldots,a_n \in k\}$$

$k^1 = k$ をアフィン直線(affine line),

k^2 をアフィン平面(affine plane)という.

零多項式と零関数

多項式 $f=\sum_{\alpha}\alpha_{\alpha}x^{\alpha}\in k[x_1,\ldots,x_n]$ は関数

$f : k^n \to k$

を与えるとき、「$f = 0$ か？」という問いは2通りの意味にとれる.

(1) f は零多項式: f のすべての係数α_{α}がゼロ

(2) f は零関数:すべての $(a_1,\ldots,a_n)\in k^n$ に対して

$f(a_1,\ldots,a_n)=0$

命題5

k を無限体とし、 $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ とする.

このとき, $k[x_1, \ldots, x_n]$ の元として $f = 0$ であることと, 関数 $f : k^n \to k$ が零関数であることは同値である.

「零多項式→零関数」は自明.

「零関数→零多項式」の証明は変数の個数 n に関する帰納法.

系6

k は無限体で, $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ とする. このとき, $k[x_1, \ldots, x_n]$ において $f = g$ となることと, $f : k^n \to k$ と $g : k^n \to k$ が同じ関数であることは同値である.

「$f = g \to$同じ関数」は自明.

「同じ関数$\to f = g$」は, $f - g$ が命題5より零多項式となることから証明.

定理7

すべての定数でない多項式 $f \in C[x]$ は C 内に根を持つ.

すべての定数でない多項式 $f \in k[x]$ が k 内に根を持つとき, 体 k は代数的閉体(algebraic closed field)であるという.

Rは代数的閉体ではない.($x^2 + 1 = 0$ の根を考えればわかる)