

# グレブナ基底の応用例

長谷川禎彦

# グレブナ基底の応用

- 以下のサイトで見つけた中で, Bioinformatics と関係の深そうな2例

[www.scholarpedia.org/article/Groebner\\_basis](http://www.scholarpedia.org/article/Groebner_basis)

- 整数計画問題(硬貨の数最小化問題)
- 制約充足問題(グラフの色付け問題)

# 整数計画問題

- 金額 $X$ 円を払うのに1円, 5円, 10円, 50円を使うとして, 最小の硬貨数の組み合わせ
- $a : 1$ 円,  $b : 5$ 円,  $c : 10$ 円,  $d : 50$ 円
  - $a + 5b + 10c + 50d = X$
  - minimize  $(a + b + c + d)$
- 硬貨の数が(1円, 5円, 10円, 50円) $= (a, b, c, d)$ の状態を単項式で表す

$$x^a y^b z^c w^d$$

# 整数計画問題

- 制約  $H = \{x^5 - y, x^{10} - z, x^{50} - w\}$
- $H$ で張られるイデアル $I$ のグレブナ基底 $G$   
 $I = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle \quad G = \{y^2 - z, z^5 - w, x^5 - y\}$

- 仮に247円の場合を考える  
– 247円を表す任意の単項式を考える

$$f = x^{247}$$

- イデアル $I$ に属する多項式

$$x^{247} - x^a y^b z^c w^d \in I \quad \longrightarrow \quad x^a y^b z^c w^d = 247 \text{ yen}$$

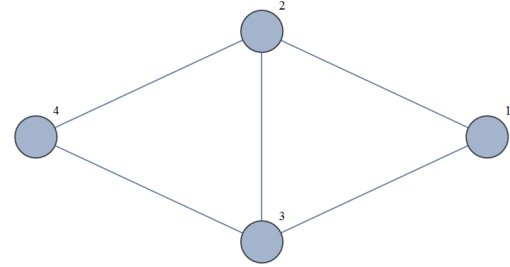
# 整数計画問題

- 順序がgrlexの場合，次数が小さいものが多いに来る
  - $f$ をグレブナ基底で割った余りは247円を表す最小の次数 (grlex的に小さい)

$$\overline{f}^G = x^2yz^4w^4$$

- 1円:2個, 5円:1個, 10円:4個, 50円:4個の場合が最小

# 制約充足問題



- グラフ色付け問題
  - $k$ 色で塗り分ける
  - エッジで隣り合うノードには必ず違う色を塗る
- $k$ 乗根で色を表現

各ノードはいずれかの色を塗る

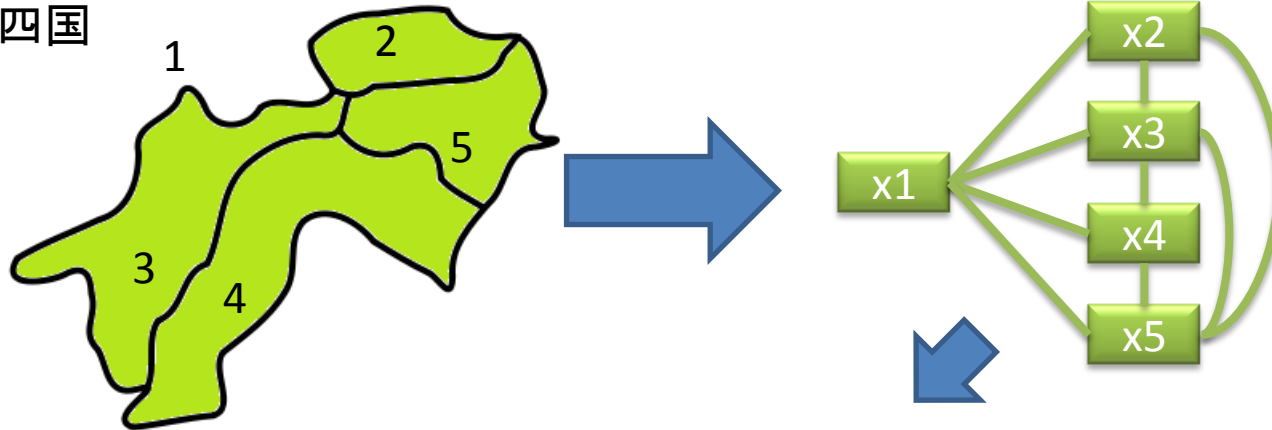
$$x_m^k - 1 = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

隣り合うノード  $x_m$  と  $x_n$  は違う色で塗る

$$\frac{x_m^k - x_n^k}{x_m - x_n} = x_m^{k-1} + x_m^{k-2} x_n^1 + \dots + x_m^1 x_n^{k-2} + x_n^{k-1} = 0$$

# 制約充足問題

四国



$$F = \{-1 + x_1^4, -1 + x_2^4, -1 + x_3^4, -1 + x_4^4, -1 + x_5^4, \\ x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3, x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3, x_1^3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_3^3, \\ x_1^3 + x_1^2 x_4 + x_1 x_4^2 + x_4^3, x_3^3 + x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2 + x_4^3, x_1^3 + x_1^2 x_5 + x_1 x_5^2 + x_5^3, \\ x_4^3 + x_4^2 x_5 + x_4 x_5^2 + x_5^3, x_3^3 + x_3^2 x_5 + x_3 x_5^2 + x_5^3, x_2^3 + x_2^2 x_5 + x_2 x_5^2 + x_5^3\}$$

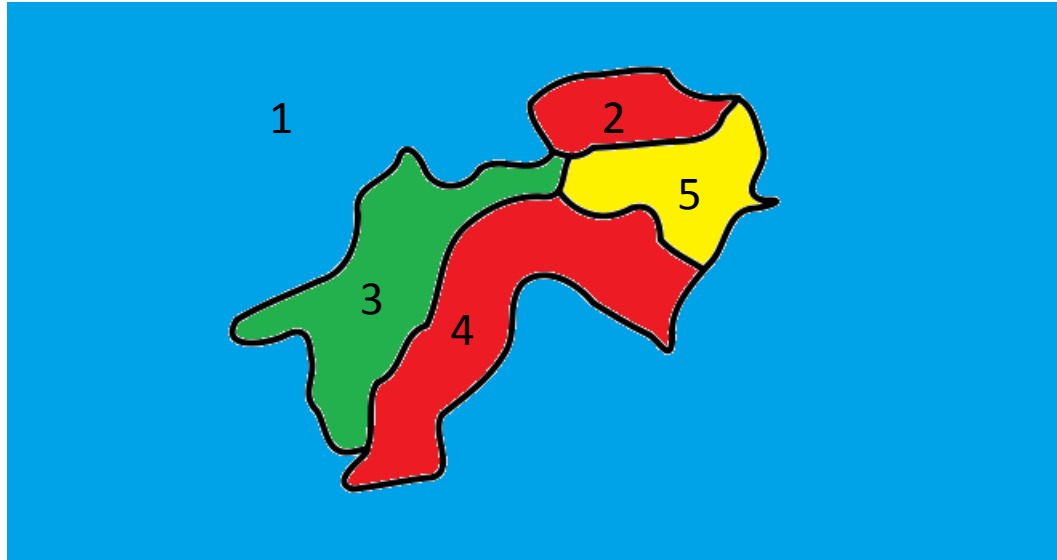
グレブナ基底 (lex順序)

$$\{-1 + x_5^4, x_4^3 + x_4^2 x_5 + x_4 x_5^2 + x_5^3, x_3^3 + x_3 x_4 + x_4^2 + x_3 x_5 + x_4 x_5 + x_5^2, x_2 - x_4, x_1 + x_3 + x_4 + x_5\}$$

解のうちの一つ

$$x_1 = -i, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -1, x_5 = 1$$

# 制約充足問題



$$x_1 = -i, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -1, x_5 = 1$$

青            赤            綠            赤            黄